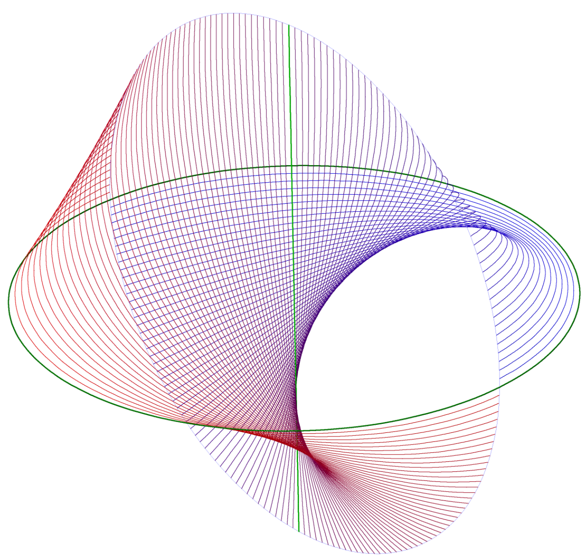
Rotaties in de ruimte, de ruimte van rotaties

Roland van der Veen (UvA)

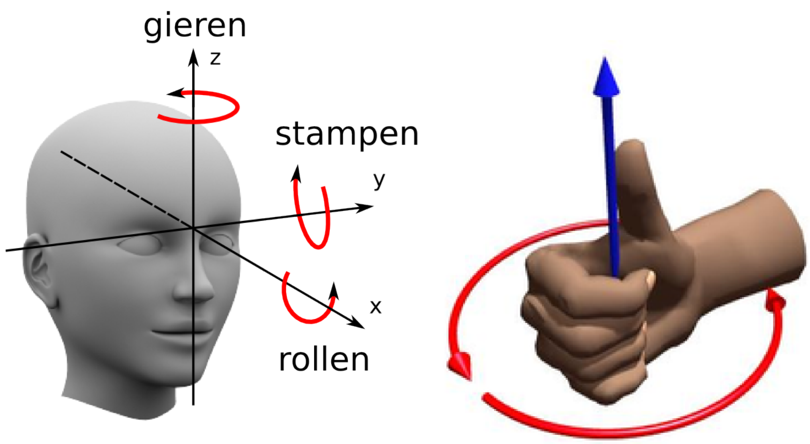
Dit is een *hands-on* inleiding in de wiskunde achter rotaties. De bedoeling is om aan hand van opgaven en puzzels zelf aan de slag te gaan. Niet alleen met pen en papier, maar ook met je handen, met sate-prikkers en ballen. Er is geen speciale voorkennis vereist, maar dat wil niet zeggen dat het makkelijk is! Wiskunde is juist leuk omdat je er hard over na moet denken en het wordt nog leuker als je handen ook mee mogen doen. Die zijn namelijk heel erg goed in het roteren van dingen.

Voor we onze kernvragen formuleren beginnen we eerst met een opgave om er in te komen. Pas op, vragen met een of meer sterren (*) zijn een uitdaging en mogen eerst overgeslagen worden.



Figuur 1: Het antwoord op vraag 5l.

1 Rollen, gieren, stampen



Figuur 2: Links: Het assenstelsel met aangegeven de rotaties rollen, gieren en stampen r, g, s. Rechts: De rechterhandregel. Duim wijst rotatie-as aan, vingers de rotatierichting.

Praten over rotaties is erg verwarrend, dat komt vaak omdat het niet duidelijk is welk assenstelsel er gebruikt wordt. Zoals in figuur 1 (links) is ons assenstelsel steeds vastgenageld aan ons hoofd, met de neus als x-as de y-as wijst van het rechter naar het linker oor en de z-as steekt recht omhoog door de kruin.

Uit de scheepvaart kennen we een aantal veel voorkomende rotaties: rollen, stampen en gieren. De bijbehorende assen zijn de x, y en z-as zoals in figuur 1. Om te weten welke kant je op draait gebruiken we de *rechterhandregel*: met de duim van je rechterhand is de as van de rotatie, de andere vingers geven dan de rotatie aan.

Vraag 1, draaien met je handen
In deze vraag gebruik je steeds je linkerhand om het effect van de rotaties bij te houden.

a. Houd je linkerhand met de palm omhoog en de vingers naar voren. Dit is steeds de *beginpositie*.

b. Rol je linkerhand vanuit de beginpositie 90 graden. Als je het goed doet (rechterhandregel!) is je linkerduim omhoog of naar beneden?

c. Voor het gemak draaien we vanaf nu in deze hele vraag iedere rotatie steeds een hoek van 90 graden. Hoe vaak moet je achter elkaar een rol doen voor je duim omlaag wijst?

d. Ga na dat je hand na vier keer rollen weer terug in de beginpositie is. (Je arm niet, maar het gaat om je hand en het idee). We schrijven dit als $r+r+r+r=0$, waarbij r staat voor een (90 graden) rol-rotatie en 0 de beginpositie symboliseert.

e. Hoe staat je linkerhand als je $r+s$ uitvoert? De s staat voor stampen en we lezen van links naar rechts, dus $r+s$ betekent eerst rollen, dan stampen. Je duim zou naar voren moeten wijzen.

f. Als je (vanuit de beginpositie) de rotaties $s+r$ uitvoert, wijst je duim dan ook omhoog? (let op de volgorde!).

g. 'Bereken' met je linkerhand wat er uit $r+r+s+s+g+g$ komt. De g staat voor (90 graden) gieren.

h.* Hebben we de letter g echt nodig? Of kunnen we g maken door een optelling van rollen en stampen? (alleen de positie van je hand doet er toe, niet van je arm)

i.* Onze drie rotatie-assen zijn niet heel efficient. De rotatie $r+s$ kan je bijvoorbeeld ook in een keer uitvoeren, als een rotatie om een enkele as. Kun je de as visualiseren? Hoe groot is de hoek? Meer of minder dan 90 graden?

j.** Hoeveel verschillende combinaties kun je maken door r, s en g op te tellen?

2 Kernvragen

Nu we warmgedraaid zijn met de rotaties is het tijd om onze kernvragen te stellen. Beide vragen zijn van groot belang voor zowel de theorie als de toepassingspraktijk.

I. **Gegeven twee rotaties, x en y, is er altijd *een* enkele rotatie met hetzelfde effect als $x+y$? Hoe vind je die?**

II. **Hoe kan je zo efficient mogelijk de ene rotatie in de andere over laten gaan? Wat is de kortste afstand tussen twee rotaties?**

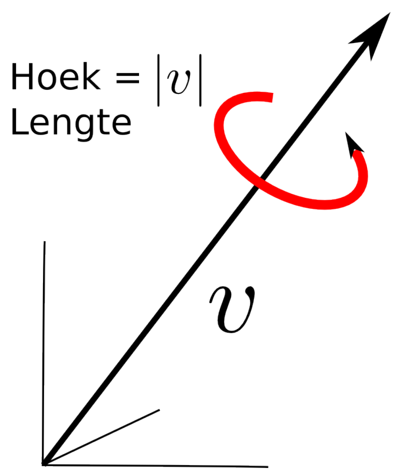
Je handen weten het antwoord op deze vragen. Anders zou je nooit een aardappel kunnen schillen. Maar hoe kun je dat automatiseren zodat een robot het ook kan? Of een ruimteschip besturen? Of de draai-symmetrie van het waterstofatoom begrijpen? De toepassingen zijn te veel om op te noemen. Rotaties zijn dan ook een fundamenteel aspect van hoe we de wereld om ons heen ervaren en manipuleren.

Ons doel is om kwalitatieve antwoorden te vinden op deze kernvragen. Zonder te verzanden in ingewikkelde formules. Dit doen we door met behulp van heel veel praktische en theoretische opgaven onze intuitie en ons wiskundig denkvermogen wat dichter bij elkaar te brengen. Onze uiteindelijke antwoorden op de kernvragen vind je aan het eind van Vraag 6 en 7. Vraag 8 is een toegift. Dit alles is natuurlijk maar een tipje van de sluier. Er zijn altijd betere en mooiere antwoorden te geven.

3 De ruimte $\mathcal{R}$ van alle rotaties

Om rotaties beter te begrijpen proberen we zo bondig mogelijk te beschrijven. De totaliteit van alle rotaties wordt zo iets tastbaars, niet meer dan een knikker.

In figuur 3 zie je hoe je aan een enkele vector (in $\mathbb{R}^3$) genoeg hebt om een rotatie te beschrijven. De richting van de vector v geeft de as van de rotatie aan, en de lengte $|v|$ stelt de hoek voor.



Figuur 3: Een rotatie van $|v|$ graden om de as aangewezen door v, (rechterhand-regel!).

Vraag 2, de ruimte van rotaties

a. Geef de vectoren voor de rotaties r, s, g uit vraag 1. Hoe lang zijn ze? (de letters r, s, g staan steeds voor 90 graden roteren.)

b. Wat gebeurt er als je twee rotaties met dezelfde as, optelt?

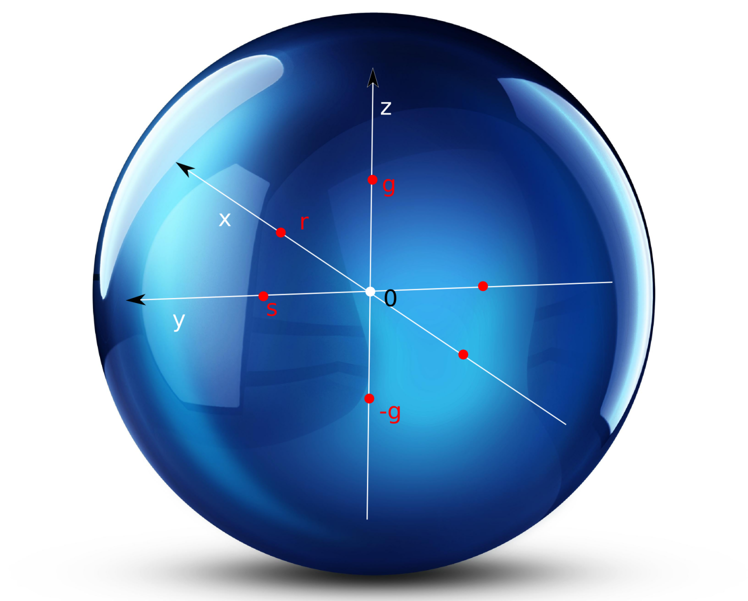
c. De rotatie die bij de vector $-v$ hoort noemen we de tegengestelde rotatie. Wat is $r+-r$? En in het algemeen $v+-v$? Probeer het met je linkerhand! We schrijven meestal $v-w$ in plaats van $v+-w$.

d. Zijn er twee vectoren die dezelfde rotatie beschrijven?

e. Waarom hoef je nooit vectoren langer dan lengte 180 te gebruiken om een rotatie te beschrijven?

f.* Ga na dat iedere vector korter dan 180 een unieke rotatie beschrijft. En de vectoren van lengte 180?

Uit vraag 2 bleek dat we iedere rotatie kunnen beschrijven met een pijltje van lengte niet meer dan 180. Alle punten die binnen een straal van 180 van de oorsprong liggen vormen samen een massieve bal die we $\mathcal{R}$ noemen. Bij ieder punt in de bal $\mathcal{R}$ hoort een vector en dus een rotatie. We noemen deze bal $\mathcal{R}$ de *ruimte van rotaties*. We zullen steeds heen en weer springen tussen, het punt in de bal $\mathcal{R}$, de bijbehorende vector en de rotatie met die as en met diens lengte als hoek.



Figuur 4: De ruimte van rotaties $\mathcal{R}$ als bal met straal 180, met de locaties van een aantal bekende rotaties.

Vraag 3, bewegingen, of rondlopen in $\mathcal{R}$

De letters r, s, g staan steeds voor 90 graden roteren.

a. Schets de ruimte $\mathcal{R}$ en geef hierin r, s en g aan. Geef ook $s + s$, $r + r$ en $r + r + r$ aan.

b. In welke zin is $r + r + r = -r$?

c. Bij elk punt p in $\mathcal{R}$ hoort ook een positie van je linkerhand, namelijk die positie die je krijgt als je je hand draait volgens die rotatie die hoort bij het punt p. Begin bij punt r in $\mathcal{R}$ en loop langzaam over de x-as naar het middelpunt van $\mathcal{R}$. Beweeg je linkerhand steeds mee. Je linkerhand begint dus met de duim omhoog en de palm naar rechts.

d. Hoe staat je hand als je bij de oorsprong bent? Hoewel wat speciaal zien we de oorsprong ook als een rotatie, namelijk met hoek 0. Dat is de 0-vector, symbool: 0.

e. Loop nu weg van 0 over de x-as, van r naar $r + r$ in $\mathcal{R}$ en beweeg steeds met de linkerhand mee.

f. Waar in $\mathcal{R}$ kom je terecht als je doorloopt nadat je het oppervlak van de bal gepasseerd bent bij hoek/lengte 180?

g. Wat is er aan de hand op het oppervlak van de bal $\mathcal{R}$?

h. Teken een pad van $r + r$ naar $s + s$ in het xy vlak in $\mathcal{R}$ over het oppervlak van de bal $\mathcal{R}$. Beweeg je linkerhand nu vanaf de stand die hoort bij $r + r$ langs dit pad naar $s + s$.

i**. Vind een zo kort mogelijk pad van r naar s.

De ruimte $\mathcal{R}$ is een handige manier om rotaties en posities van objecten beter te begrijpen en te 'plotten'. Iedere beweging, hoe complex ook, is niet meer dan een eenvoudig pad door $\mathcal{R}$. In de computergraphics wordt dit veelvuldig toegepast onder de naam *motion capture*.

Onze kernvragen kunnen we nu scherper herformuleren in termen van $\mathcal{R}$: Vraag II is het eenvoudigst: Is er een goed afstandsbegrip in $\mathcal{R}$? Vraag I gaat over hoe je van twee punten in $\mathcal{R}$ een derde maakt door ze op te tellen. Een belangrijke eerste stap in deze richting zetten we in de volgende vraag.

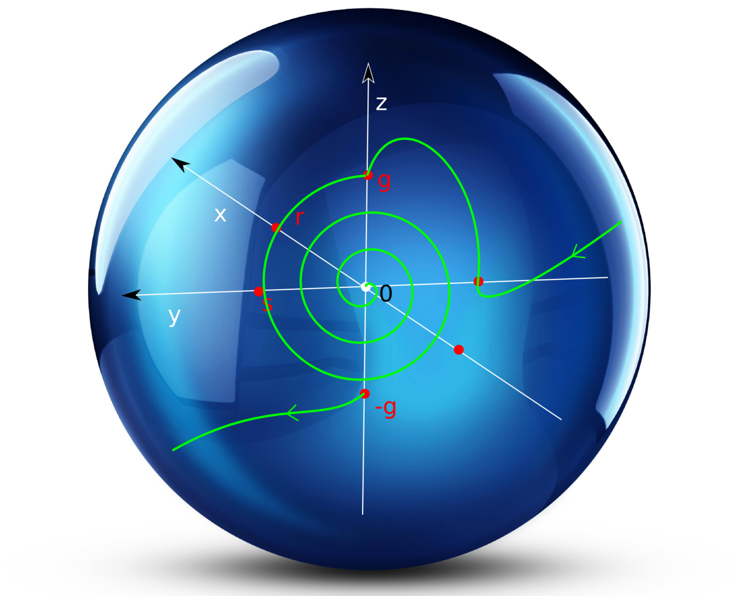
Vraag 4, rotaties draaien

a. De ruimte $\mathcal{R}$ is een abstracte ruimte, maar wat gebeurt er als we doen alsof het een concrete voetbal is? Heeft het zin om $\mathcal{R}$ zelf te draaien? Ga na draaien van een punt p in $\mathcal{R}$ met de rotatie x een nieuw punt van $\mathcal{R}$ oplevert, we noemen dit punt $x(p)$.

b. Toon aan dat $s(g) = r$. Bereken ook het punt $r(s)$. Bedenk dat twee rotaties gelijk zijn als ze hetzelfde effect hebben op je linkerhand.

c. Draai je hoofd volgens de rotatie x terwijl je je linkerhand in de beginpositie laat. Omdat je je hoofd gedraaid heb zijn je assen nu ook meegedraaid, (de x-as is je neus). Ga na dat als je nu p toepast op je linkerhand, het effect precies dat van $x(p)$ is.

d. Controleer dat de beschrijving in c. werkt voor $x = s$ en $p = g$. Je buigt je hoofd dus naar voren en kijkt omlaag...



Figuur 5: Wat voor beweging is aangegeven in groen?

e. In het vervolg mag je nog steeds $x = s$ en $p = g$ nemen voor het gemak. Begin met je hoofd gedraaid volgens x en je hand in de beginpositie als in deel c. Pas vervolgens de rotatie $-x$ toe op zowel hoofd als linkerhand. Tot slot pas je p toe op alleen je linkerhand. Vergelijk de positie van je hand en hoofd met die in aan het eind van deel c.

f. Bereken met je linkerhand dat $r = -s + g + s$.

g. Concludeer uit je antwoord op deel e. dat $x(p) = -x + p + x$.

h. Controleer je antwoord op vraag 1h met behulp van de formules uit deel g. en b.

4 Het boloppervlak en de vezels van $\mathcal{R}$

Voor de volgende opgave is het handig om een holle plastic bal (zoals je ze in een ballenbak vindt) en een sateprikker te hebben. Plak twee verschillende plakkertjes op je bol. Een ervan noemen we de noordpool N. De andere zit op een willekeurige plaats en noemen we p. We gaan het effect van rotaties op deze bal bestuderen, de bal vervangt dus je linkerhand. Pas op, deze bal is *niet* een model voor $\mathcal{R}$.

Vraag 5 (de vezel)

a. Houd de bol losjes in de palm van je linkerhand met je vingers er omheen (als een oog in een oogkas) zodat je wijsvinger de noordpool N aanwijst. Prik je sateprikker in de bol en draai de bol om de as van de sateprikker.

b. Probeer de sateprikker zo te plaatsen dat je voor rotatie de noordpool N onder je wijsvinger hebt en na rotatie het andere plakkertje p onder je wijsvinger zit (houd je vingers stil!).

c. Probeer zo veel mogelijk verschillende plaatsen te vinden voor je sateprikker zo dat je N naar p kunt draaien langs die as als bij b. Kan het ook met een hoek van 180 graden?

d. Zie je een patroon in de gaten die je hebt geprikt? Alle rotaties die N naar p sturen noemen we V_p. Uitspraak: *de vezel van p.*

e. De vezel bestaat uit rotaties en is dus een deel van $\mathcal{R}$. Leg uit waarom uit deel c en d volgt dat V_p een bepaald pad door $\mathcal{R}$ is.

f. Leg uit V_N, de vezel van N, alle rotaties zijn die de noordpool N op zijn plaats laten. Waarom is V_N de z-as in $\mathcal{R}$? En wat is de vezel van de zuidpool?

g. Er zijn twee makkelijke punten in iedere vezel V_p: Een rotatie met 180 graden en een rotatie waarvan de as loodrecht staat op het vlak door p, N en het midden van de bal. Maak hiermee een ruwe schets van V_p in $\mathcal{R}$ waarbij p het plakkertje op je bal voorstelt.

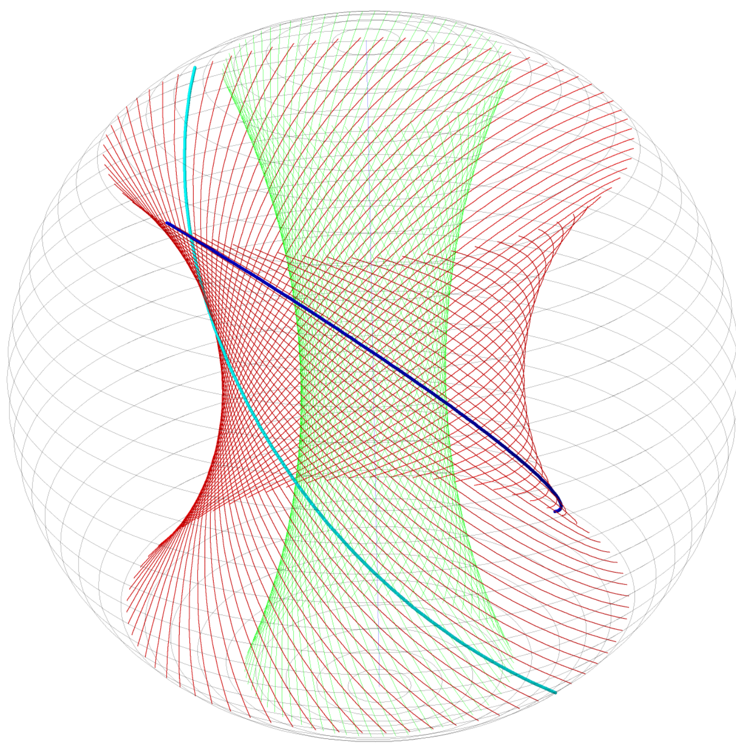
h. Vergelijk je schets in deel g. met figuur 6. Hier zijn de vezels voor heel veel verschillende punten p getekend.

i. De rode lijnen in figuur 6 stellen V_x voor met x op de evenaar. Waarom vormen ze een draaisymmetrisch figuur?

j. De donkerblauwe lijn is ook de vezel van een punt. Welk punt? En de lichtblauwe lijn? En de groene lijnen? Gebruik deel g.

k. In welke zin is iedere vezel een gesloten pad door $\mathcal{R}$?

l.** Als C een grote cirkel is die N met S verbindt, wat is dan de verzameling V_C van alle rotaties die N naar een punt van C sturen?



Figuur 6: De vezels van een aantal punten op de evenaar in rood. Twee specifieke vezels in donker- en lichtblauw. Meer vezels van punten in groen.

De vezels zijn de sleutel tot ons begrip van rotaties. De naam komt van de beroemde Hopf-vezeling.

5 Antwoorden op de kernvragen

Aan de hand van de vezels kunnen we nu een antwoord geven op onze twee kernvragen. Dit waren ze:

I. **Gegeven twee rotaties, x en y, is er altijd *een* enkele rotatie met hetzelfde effect als $x + y$? Hoe vind je die?**

II. **Hoe kan je zo efficient mogelijk de ene rotatie in de andere over laten gaan? Wat is de kortste afstand tussen twee rotaties?**

We beginnen met vraag II. Het antwoord is: De vezels zijn de kortst mogelijke paden! In de abstracte ruimte $\mathcal{R}$ is het niet meteen duidelijk wat we precies met afstand bedoelen. In vraag 6 gaan we hier dieper op in. In vraag 7 pakken we kernvraag I aan: we construeren met de vezels $x+y$ uit x en y in $\mathcal{R}$.

Vraag 6, kortste paden

a. We gaan er vanuit dat er geen snellere manier is om van de oorsprong 0 naar een rotatie x te komen dan rechtdoor over de as van x. De afstand is dan precies de hoek/lengte van x. Dus *assen zijn kortste paden.* Waarom is dit redelijk?

b. Onze tweede aanname is dat *de afstand tussen rotaties a en b gelijk is aan de afstand tussen $a + x$ en $b + x$.* Neem bijvoorbeeld $a = 0$ en $b = s$ en $x = r$ en vergelijk het kortste pad γ (langs de as) van a naar b met het pad $\gamma + x$ dat je krijgt als je steeds x doordraait.

c. Leg uit waarom de vezel V_N een kortste pad in $\mathcal{R}$ is.

d. Laat zien dat $V_x = V_N + x$

e. Concludeer dat de vezels V_x kortste paden zijn in $\mathcal{R}$.

f. Waarom is een rechte lijn in $\mathcal{R}$ meestal niet de kortste weg? (Gegeven onze aannames).

g. Ga na dat $s + s = g + g + r + r$ en gebruik dit om de kortste weg tussen $r + r$ en $s + s$ te vinden. Op welke vezel ligt dit?

h. Gebruik nu de aannames om antwoord te geven op Kernvraag II: De afstand tussen twee rotaties a en b is de hoek van de rotatie $b - a$.

i. Ligt het kortste pad tussen a en b altijd op een vezel? Denk aan opgave 4.

In Kernvraag II wilden we weten: wat is de afstand tussen rotaties a en b. We weten nu dat deze afstand gelijk is aan de hoek/lengte van $b - a$. Maar hoe kom je aan de rotatie $b - a$ als je alleen a en b weet? Dat is precies Kernvraag I.

De vezels V_x zijn niet alleen de kortste paden, ze geven ook een kwalitatief idee hoe optelling van rotaties werkt. Daarmee beantwoorden we onze Kernvraag I in de volgende opgave.

Vraag 7, de optelling

a. Als $n \in V_N$ and $v \in V_a$ laat dan zien dat $n + v$ weer in de vezel V_a zit.

b. Laat ook zien dat de afstand tussen v en $n + v$ precies de lengte $|n|$ is.

c. Ga na dat dit samen met deel a. betekent: van links n optellen draait alle vezels een lengte $|n|$ door.

c. Bewijs dat $n(v)$ in de vezel $V_{n(a)}$ zit als $v \in V_a$. (Kijk wat er met de noorpool gebeurt als je $n(v) = -n + v + n$ toepast.)

d. Leg uit waarom we als we de optelling $x+y$ willen begrijpen, we er vanuit mogen gaan dat $y \in V_N$.

e. Kernvraag I vraagt naar een constructie van $z = x + y$ uit x en y. Laat eerst zien dat $z = y - y + x + y = y + y(x)$.

f. Concludeer dat $z = x + y$ het punt van $\mathcal{R}$ is dat je krijgt door eerst het punt x in $\mathcal{R}$ te draaien met de rotatie y en vervolgens binnen de vezel een afstand $|y|$ door te draaien. Dit is ons antwoord op Kernvraag I.

g. Probeer of je zo kunt begrijpen wat $s + g + g$ is

h.* Vergelijk nu de constructies voor $x + y$ en $y + x$, wat is het verschil?

We hebben gezien hoe je met behulp van de vezels meer inzicht krijgt hoe rotaties samenhangen. De kortste weg tussen twee rotaties loopt altijd over een vezel. Bovendien kun je het cummulatieve effect van twee rotaties goed begrijpen door te kijken naar de vezels. Het is een kwestie van vezels doorschuiven en de rotatie draaien zoals in vraag 4.

Natuurlijk is er nog veel meer over te zeggen maar dit is in elk geval een eerste begin. Voor meer informatie, literatuurverwijzingen, plaatjes en de Sage-commando's om de plaatjes te maken, kijk op `www.rolandvdv.nl`

6 Nogmaals rollen, gieren en stampen in $\mathcal{R}$

Als toegift komen we terug op het rollen, gieren en stampen waar we mee begonnen in vraag 1. Gewapend met onze kennis van $\mathcal{R}$ kijken we nog eens naar alle combinaties die je kunt maken met de rotaties r, g, s. Er blijkt verrassend mooie meetkunde achter te zitten. Bovendien kunnen we onze vezels, en vindingen in de vragen 2-7 terugvinden in deze eenvoudigere context.

Vraag 8, kubus en 24-cel

a. Als je een kubus 90 graden rolt (dus r toepast) en de as van r gaat door het centrum van de kubus, ga na dat de kubus dan in dezelfde positie terecht komt. Dit noemen we een symmetrie van de kubus.

b. Laat zien dat niet alleen r, maar ook s en g symmetrieen zijn van de kubus.

c. En $r + s$? Zijn optellingen van r, s, g weer symmetrieen van de kubus?

d.* Krijg je zo alle symmetrieen van de kubus?

e. Je kunt draai-symmetrieen van de kubus maken door een as te prikken door twee tegenoverliggende vlakken, twee tegenoverliggende ribben, of twee tegenoverliggende hoekpunten. Hoeveel zijn er van elk?

f. In figuur 7 zijn alle combinaties van r, s, g in $\mathcal{R}$ getekend. Kun je de punten herkennen als symmetrieen uit deel e? (Pas op, twee tegenoverliggende punten op de rand van $\mathcal{R}$ zijn dezelfde rotatie). Herken je ook de hoeken = lengtes van de vectoren in $\mathcal{R}$?

g. Zie je hoe de punten een kubus, twee octaëders en de cubo-octaëder vormen? En het laatste punt in het midden?

h. Kies een noordpool N op de kubus die we aan het draaien zijn, zodat g in de vezel V_N zit. Verbind alle punten in figuur 7 die in dezelfde vezel zitten.

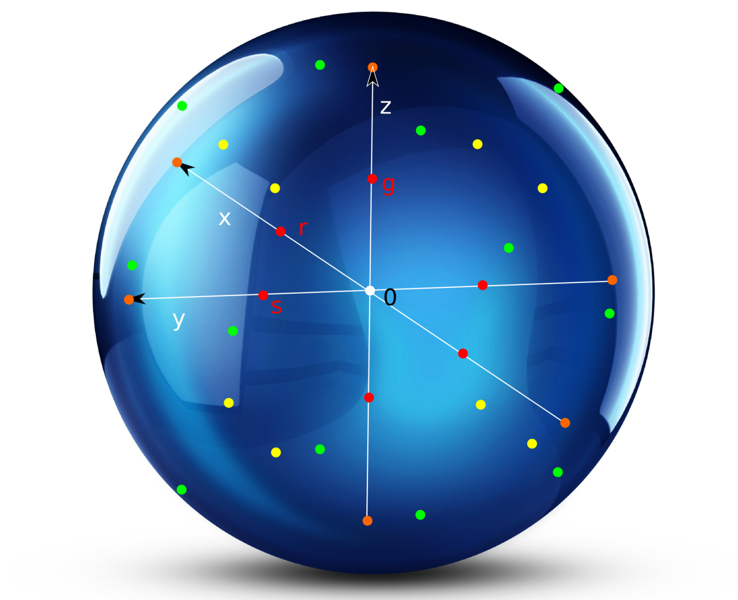
i. Zie je hoe g van links optellen de vezels 90 graden doordraait/doorschuift?

e. Met behulp van de getekende vezels kunnen we kijken of we begrijpen wat het effect is van links optellen van g. (zie vraag 7f). Zie je het verband tussen x en $g + x$ in termen van de vezels? (eerst x draaien en dan de vezel doorschuiven...)

g. Stel x is een van de 24 punten in de figuur 7. De verzameling C_x bestaat uit de punten p in $\mathcal{R}$ die dichter bij x zijn dan bij een van de andere 23 punten in de figuur. Ga na dat de 24 verzamelingen C_x $\mathcal{R}$ netjes in stukken verdelen. Wat zijn dit voor stukken en hoe bewegen de rotaties ze?

h. De 6 punten van de cubo-octaeder en de 6 punten van de kleine octaeder gevormd door $r^{\pm 1}, p^{\pm 1}, y^{\pm 1}$ noemen we *oneven*. De andere 12 punten noemen we even. Laat zien dat de even punten precies de symmetrieen van de tetraeder zijn. (Maak een tetraeder door vier hoekpunten van je kubus te kiezen).

i.* Verdeel $\mathcal{R}$ in stukken als in deel g maar gebruik hiervoor alleen de oneven punten. Laat zo zien dat $\mathcal{R}$ verdeeld wordt in 12 gelijke octaeders. Dit is een glimp van het vierdimensionale Platonische lichaam genaamd de 24-cel.



Figuur 7: Alle combinaties van rollen, gieren, stampen, 24 stuks(!). Zie je de twee octaëders, de kubus en de cubo-octaëder?